L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
Février 2017

Feuille de TD 5
Séries de fonctions

Exercice 1. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^2+1}.$$

Exercice 2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n+x}.$$

Exercice 3. Montrer que la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

converge uniformément sur $[0,1]$ mais ne converge pas normalement ni même absolument sur $[0,1]$.

Exercice 4. Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels et $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[0,1]$ et non identiquement nulle. On pose pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} U_n : \quad & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} a_n f(x-n) & \text{si } x \in [n, n+1[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ converge normalement si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument.
3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ converge uniformément si et seulement si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5. Etudier la convergence simple, normale puis uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où pour tout $n \geqslant 1$ la fonction f_n est définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx^2}.$$

Exercice 6. Etudier la convergence simple, normale puis uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où pour tout $n \geqslant 1$ la fonction f_n est définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}.$$

Exercice 7. Etudier la convergence simple, normale puis uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où pour tout $n \geqslant 1$ la fonction f_n est définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(x+1)}\right).$$

Exercice 8.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série,
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-kx^k}\,.$$
2. Montrer que la fonction
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^n}$$
est continue et dérivable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 9. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall n \geqslant 1, \qquad f_n(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{n} \ \text{ si } x > 0.$$

1. Montrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$ et en déduire que
$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$
2. Calculer la somme de cette dernière série sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Démontrer que $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ converge et que
$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 10.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. On pose, pour tout $N \geqslant 1$, tout $x \in]0, 1]$,
$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} -x^{2n}\ln(x).$$
Montrer que
$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 R_N(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
3. En déduire que
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
4. Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en déduire la valeur de I.

Exercice 11. On considère une série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est donné sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $n \geqslant 1$,
$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note S la fonction somme.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
3. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} S(1/p) = +\infty$ et par un argument de monotonie, en déduire $\lim_{x\to 0^+} S(x)$.
4. Calculer $\lim_{x\to 0^+} xS(x)$.
Indication : faire une comparaison série-intégrale.